4. А н д р е е в Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n\ (m>n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1979. Вып. 10. С. 5-9.

5. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \widehat{P}_n\ (m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып. 18. С. 5-9.

УДК 514.76

О ДВУХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЯ

В.Т.Б а з ы л е в

(МГПИ им. В.И. Ленина)

В статье дано определение характеристических направлений отображения пространств аффинной связности без кручения. Доказано, что в случае отображения областей аффинных пространств это определение совпадает с классическим определением, идущим от О. Борувки [1].

1. Пусть $(\mathfrak{X}_n, \nabla)$ и $(\bar{\mathfrak{X}}_n, \bar\nabla)$ -пространства аффинной связности без кручения (возможен случай, когда базы $\mathfrak{X}_n$ и $\bar{\mathfrak{X}}_n$ совпадают) и $f: \mathfrak{X}_n \to \bar{\mathfrak{X}}_n$ -диффеоморфизм (вообще говоря, рассмотрение локальное, так что речь может идти о некоторой области $\Omega \subset \mathfrak{X}_n$ и диффеоморфной ей области $\bar\Omega \subset \bar{\mathfrak{X}}_n$). Связность ∇ $(\bar\nabla)$ определяется 1-формами ω^i, ω^i_j $(i,j,k,\ell = \overline{1,n})$ (θ^i, θ^i_j), удовлетворяющими известным уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad \mathcal{D}\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \tfrac{1}{2} R^i_{jk\ell}\, \omega^k \wedge \omega^\ell, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \quad \mathcal{D}\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \tfrac{1}{2} \bar R^i_{jk\ell}\, \theta^k \wedge \theta^\ell. \tag{2}$$

Пусть $f(x) = \bar x$. К точкам x и $\bar x$ присоединим подвижные реперы $R^x = (x, X_i)$ и $R^{\bar x} = (\bar x, X'_i)$. Относительно такой пары реперов отображение f будет задаваться системой уравнений вида $\theta^i = \mu^i_j \omega^j$. Применение этих уравнений в изучении свойств отображения f приводит к значительным аналитическим осложнениям. Мы будем брать реперы R^x и $R^{\bar x}$ согласованными в индуцированном отображении $f_*: R^{\bar x} = f_{*x}(R^x)$. Имеем: $dx = \omega^i X_i$, $d\bar x = \theta^j X'_j$, $d\bar x = f_{*x}(dx)$. Учитывая, что отображение f_{*x} действует линейно на векторы из векторного пространства $T_x(\mathfrak{X}_n)$, мы теперь приходим к системе уравнений:

$$\theta^i = \omega^i. \tag{3}$$

Это есть система дифференциальных уравнений отображения f относительно согласованной пары реперов R^x и $R^{\bar x}$.

2. Продолжая систему уравнений (3), находим

$$\theta^i_j - \omega^i_j = h^i_{jk}\, \omega^k, \tag{4}$$

где h^i_{jk} - тензор, симметричный по нижним индексам (тензор аффинной деформации [2]).

Пусть $T(\mathfrak{X}_n)$-касательное расслоение на многообразии $\mathfrak{X}_n$. Поле тензора h^i_{jk} позволяет построить отображение

$$h: T(\mathfrak{X}_n) \times T(\mathfrak{X}_n) \to T(\mathfrak{X}_n)$$

по закону: если $\xi = \xi^i X_i$, $\eta = \eta^j X_j$, то

$$h(\xi,\eta) = h^i_{jk}\, \xi^j \eta^k X_i. \tag{5}$$

Отсюда следует, что $h(a\xi, b\eta) = ab\, h(\xi,\eta)$, и, значит, отображение h каждую пару 1-распределений $\Delta_1(\xi)$, $\Delta'_1(\eta)$, определенных в расслоении $T(\mathfrak{X}_n)$, переводит в некоторое 1-распределение, определенное формулой (5). Из формулы (5) следует, что 1-распределение $\Delta_1 = \Delta_1(\xi)$, удовлетворяющее условию

$$h(\Delta_1, \Delta_1) = \Delta_1, \tag{6}$$

не зависит от выбора репера R^x.

1-распределение Δ_1, удовлетворяющее условию (6), мы назовем характеристическим 1-распределением отображения f. Следовательно, характеристическое 1-распределение определяется векторным полем ξ, которое удовлетворяет системе уравнений:

$$h^i_{jk}\, \xi^j \xi^k = \lambda \xi^i. \tag{*}$$

В этом случае направление (x, ξ) называется характеристическим направлением в точке x.

Легко подсчитать, что в общем случае отображения существуют $m = 2^n - 1$ характеристических направлений. Их интегральные кривые, называемые характеристическими линиями, образуют характеристическую m-ткань линий. На многообразии $\bar{\mathfrak{X}}_n$ ей соответствует m-ткань линий, которая является характеристической для отображения f^{-1}.

Распределение Δ_1 называется f-асимптотическим (или f-главным), если оно удовлетворяет условию $h(\Delta_1, \Delta_1)=0$. Интегральная кривая такого распределения называется f-асимптотической (или f-главной). Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. Любая гладкая линия $\gamma \subset \mathfrak{X}_n$ является f-аситотической тогда и только тогда, когда поле тензора h^i_{jk} -нулевое.

Два 1-распределения Δ_1, Δ_1' назовем f-сопряженным, если $h(\Delta_1, \Delta_1')=0$. Ясно, что тогда и $h(\Delta_1', \Delta_1)=0$. Можно заметить, что f-асимптотическое распределение есть распределение f-самосопряженное. Справедлива

Т е о р е м а 2. В общем случае гладкого отображения f на многообразии $\mathfrak{X}_n$ существует по крайней мере одна f-сопряженная 2-ткань.

3. Гладкую линию $\gamma \subset \mathfrak{X}_n$ можно задать уравнениями $\omega^i=\theta\xi^i$, $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1$. Тогда $X=\xi^i X_i$-касательный вектор к линии γ в ее точке x. В силу уравнений (3) линия $\bar\gamma=f(\gamma)$ определяется теми же уравнениями, что и линия γ. Как известно, линия γ называется геодезической, если $\nabla_X X=\lambda X$, то есть

$$d\xi^i+\xi^j\omega^i_j=\lambda\xi^i. \qquad (7)$$

Линия $\bar\gamma$ будет геодезической, если она удовлетворяет условию:

$$d\xi^i+\xi^j\theta^i_j=\bar\lambda\xi^i. \qquad (8)$$

Из уравнений (7),(8) находим: $h^i_{jk}\xi^j\xi^k=t\xi^i$ $\left(t=\frac{\bar\lambda-\lambda}{\theta}\right)$.
Таким образом, верна

Т е о р е м а 3. Если γ и $f(\gamma)$ -геодезические, то γ - характеристическая линия отображения f.

4. Пусть $n \geqslant 3$ и $(\mathfrak{X}_n, \nabla)$, $(\bar{\mathfrak{X}}_n, \bar\nabla)$-аффинные (в частности, евклидовы) пространства и гладкая линия γ касается в точке x прямой $(x, \vec{a})$. Тогда линия $\bar\gamma=f(\gamma)$ касается прямой $(y, \vec{b})$ в точке $y=f(x)$, где $\vec{b}=f_{*x}(\vec{a})$. Линия $\gamma'=f_{*x}(\gamma)$ также касается прямой $(y, \vec{b})$ в точке y.

Зададим линию $\gamma \subset \mathfrak{X}_n$ системой уравнений: $\omega^i=m^i\theta$, $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1$. Соприкасающиеся плоскости $\Pi_2(x,\gamma)$, $\Pi_2(y,\bar\gamma)$ определяются так:

$$\Pi_2(x,\gamma)=(x, m^i X_i, (dm^i+m^j\omega^i_j)X_i), \qquad (9)$$

$$\Pi_2(y,\bar\gamma)=(y, m^i X'_i, (dm^i+m^j\theta^i_j)X'_i). \qquad (10)$$

Соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(\gamma')=f_{*x}(\Pi_2(\gamma))$ к линии γ' определяется следующими элементами:

$$\Pi_2(y,\gamma')=(y, m^i X'_i, (dm^i+m^j\omega^i_j)X'_i) \qquad (11)$$

Выражение (10) можно записать так:

$$\Pi_2(y,\gamma')=(y, m^i X'_i, (dm^i+m^j\theta^i_j)X'_i - m^j(\theta^i_j-\omega^i_j)X'_i). \qquad (12)$$

Из равенств (10),(12) следует, что плоскости $\Pi_2(y,\gamma')$ и $\Pi_2(y,\bar\gamma)$ совпадают, если $m^j(\theta^i_j-\omega^i_j)X'_i \in \Pi_2(y,\bar\gamma)$. Следовательно, должны существовать такие 1-форма α и скаляр β, которые удовлетворяют условию:

$$m^j(\theta^i_j-\omega^i_j)=\alpha m^i+\beta(dm^i+m^j\theta^i_j). \qquad (13)$$

Потребуем, чтобы указанные плоскости совпадали при любом выборе линии γ, касающейся прямой $(x, \vec{a})$. Значит, надо рассматривать равенство (13) при любых параметрах m^i, удовлетворяющих условию: $m^1 : m^2 : \ldots : m^n = c^1 : c^2 : \ldots : c^n$, $c^i=\mathrm{Const}$.

При таком выборе параметров, определяющих прямую $(y, \vec{b})$, положение плоскости $\Pi_2(y,\bar\gamma)$ зависит только от значений дифференциалов dm^i (см. формулу (10)).

Имеем: $m^i=c^i t$. При $t\to 0$ $(t\neq 0)$ точка m, определяемая вектором $\vec{xm}=c^i t X_i$, стремится по прямой $(x, \vec{b})$ к точке x, не совпадая с ней. Так как выбор γ произволен, то мы можем считать, что в этом предельном переходе из дифференциалов dm^i хотя бы один отличен от нуля (в противном случае из формулы (9) следует, что плоскость $\Pi_2(x,\gamma)$ не существует). Из формулы (13) в пределе находим:

$$(\lim_{m\to x}\beta)\lim_{m\to x}(dm^i)=0.$$

Отсюда $\lim_{m\to x}\beta=0$. Таким образом, пусть бесконечно малые значения параметров m^i (1-го порядка малости) определяют прямую $(x, \vec{a})$. Тогда верна

Т е о р е м а 4. Соприкасающиеся плоскости $\Pi_2(y, f(\gamma))$ и $\Pi_2(y, f_{*x}(\gamma))$ совпадают тогда и только тогда (с учетом лишь бесконечно малых значений параметров m^i), когда выполняются соотношения:

$$(\theta^i_j-\omega^i_j)m^j=\alpha m^i, \qquad (14)$$

где α -некоторая I-форма.

Направление прямой $(x,\bar{x})$, параметры m^i которой удовлетворяют полученным уравнениям (I4), принято называть характеристическими направлениями отображения f в точке x.

Такое определение характеристических направлений отображения восходит к работе [1] Борувки 1926г. Он дал определение характеристических направлений в данной точке при рассмотрении отображения двумерных проективных плоскостей (используя элементы касания различных порядков в этой точке). Затем понятие характеристических направлений было перенесено на случай отображения областей пространств размерности $n\geqslant 3$ проективных, аффинных и евклидовых [3].

Это классическое определение, связанное при $n\geqslant 3$ с совпадением соприкасающихся плоскостей $\Pi_2(y,\bar{\gamma})$ и $\Pi_2(y,\gamma')$, хорошо работает в случае отображения одной плоской области в другую плоскую область (тогда существует линия γ' и соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(y,\gamma')$). Если же мы рассматриваем отображение "кривых" пространств, то указанное выше определение характеристических направлений с помощью линии γ' (которой здесь не существует) не годится. Правда, в случае отображения областей, лежащих на гиперповерхностях евклидова n-пространства А.С.Добротворскому [4] удалось ввести на этих гиперповерхностях понятие характеристических направлений отображения, используя при этом классическое его определение. Но это было сделано за счет достаточно сложных вспомогательных построений.

5. Если исходить из алгебраической точки зрения, то определение характеристических направлений, данное нами в п.2 (и пригодное не только для отображения плоских областей, но и для отображения кривых областей), и классическое определение, выражающееся в выполнении равенств (I4), на самом деле совпадают.

Действительно, I-распределение $\Delta_1(\xi)$ можно задать отношением форм $\omega^i=\xi^i\theta$ $(\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1)$. Тогда систему (*) п.2, которая определяет характеристическое I-распределение, можно записать в виде:

$$h^i_{jk}\,\omega^j\omega^k=\lambda^*\omega^i \quad (\lambda^*=\lambda\theta). \tag{I5}$$

Теперь рассмотрим классическое определение (I4). Заменив в этом равенстве $\theta^i_j-\omega^i_j$ на $h^i_{jk}\omega^k$ и m^j на m^j/θ, мы получим ту же систему равенств (I5) (где $\lambda^*=\alpha$). Поэтому можно ввести

такое определение [5], обобщающее классическое.

Определение. При изучении отображений $f:(\mathfrak{X}_n,\nabla)\to(\bar{\mathfrak{X}}_n,\bar{\nabla})$ мы будем называть характеристическими такие I-распределения $\Delta_1=\Delta_1(\xi)$, которые удовлетворяют условию (6). Векторное поле ξ, задающее такое I -распределение, удовлетворяет системе уравнений (*).

Библиографический список

I. Bořůvka O. Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs. I, II. Spisy přírodověd. fak. Brně, 1926. V. 27, 72, 85.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Итоги науки, 1963/ ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

4. Добротворский А.С. Отображение гиперповерхностей евклидовых пространств//Геометрия погруженных многообразий: Сб.тр./МОПИ им.Н.К.Крупской. М., 1972. С.46-58.

5. Базылев В.Т. К геометрии отображений пространств аффинной связности/Восьмая Всесоюзная научная конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии: Тезисы докл. Одесса, 1984. С.IO.

УДК 514.75.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ Δ_n НА МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВА P_n

Г.П.Бочилло
(Томский ун-т)

В работе рассматриваются распределения Δ_n на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов пространства P_n. В смысле [1] Δ_n являются распределениями касательных элементов, порожденных n-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $x=\{A,\alpha\}$ пространства P_n. Здесь A -точка, α -инцидентная ей гиперплоскость пространства P_n. Регулярное (по аналогии с [2]) распределение Δ_n на M_{2n-1} порождает поле невырожденного тензора второй валентности $\hat{\Gamma}$ -главного фундаментального